KONSEP DATA ASSIMILASI ANSAMBEL PADA ESTIMASI HANTARAN PANAS DIMENSI SATU

Oleh :
Hery Andi Sitompul [1)]
Enzo W. B. Siahaan [2)]
Universitas Darma Agung [1,2)]
E-mail:
herystpl@gmail.com [1)]
Enzo.battra84@gmail.com [2)]

ABSTRACT

The concept of data assimilation is an estimation method that combines measurement data at a certain time into the estimation model so that it is expected that the estimation results will be better. One of the concepts of data assimilation is the Ensemble Kalman Filter method. This concept will be applied to the finite difference method to estimate the solution of the one-dimensional heat equation. From the results of the study that has been carried out, it is found that this concept works well, it can be concluded from the percentage of absolute error produced which is better than the percentage of absolute error of the finite difference method.

Key Word : Heat Equation, Finite Diference, Assimilation Data.

ABSTRAK

Konsep assimilasi data merupakan suatu metode estimasi yang menggabungkan data pengukuran pada saat tertentu kedalam model estimasi sehingga diharapkan hasil estimasi akan lebih baik. Salah satu konsep data assimilasi adalah metode Ensemble Kalman Filter. Konsep ini akan diterapkan pada metode beda hingga untuk mengestimasi solusi persamaan panas dimensi satu. Dari hasil kajian yang telah dilakukan diperoleh bahwa konsep ini berhasil dengan baik, hal ini dapat disimpulkan dari persentase kesalahan absolut yang dihasilkan lebih baik dibandingkan dengan persentase kesalahan absolut metode beda hingga.

Kata Kunci : **Persamaan Difusi, Beda Hingga, Assimilasi Data.**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan sebuah topik dalam ilmu matematika yang paling menarik untuk dikaji, karena untuk memodelkan persoalan yang dialami dalam kehidupan sehari – hari pada umumnya menggunakan konsep persamaan diferensial baik itu persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial.

Hantaran panas atau persamaan difusi merupakan salah satu bentuk persamaan diferensial parsial yang memodelkan aliran panas dalam satu medium padat. Solusi untuk persamaan difusi atau hantaran panas baik secara analitik maupun secara numerik sudah sangat banyak dikaji oleh para ilmuan. Oleh karena itu dalam kajian ini akan dicoba sebuah konsep estimasi untuk model hantaran panas dengan menggunakan assimilasi data ansambel. Dalam hal ini konsep stokastik akan digabungkan dengan konsep deterministik untuk mendekati solusi dari sebuah persamaan hantaran panas.

1.2. Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan kajian apakah konsep assimilasi data ansambel dapat mengestimasi solusi dari persamaan difusi atau hantaran panas. Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Menerapkan konsep assimilasi data ansambel dalam hal ini adalah metode Ensemble Kalman Filter pada model persamaan difusi atau hantaran panas berdimensi satu.
2. Mendapatkan hasil estimasi dengan persentase kesalahan mutlak yang kecil .

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial Parsial

Dari persfektif matematika murni persamaan diferensial parsial adalah sebuah fungsi u yang memuat beberapa peubah bebas $x_1, x_2, ..., x_n$ beserta turunan – turunan parsial u terhadap peubah bebas tersebut. Sebagai contoh jika sebuah fungsi dua peubah $u(x,y)$ maka bentuk turunan parsial terhadap kedua variabelnya ada dalam beberapa bentuk berikut :

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan Laplace

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan gelombang.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ persamaan panas

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y)$ persamaan poisson

Dalam menyederhanakan notasi penulisan biasanya dituliskan : $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,sehingga bentuk keempat persamaan diatas dapat dituliskan dengan : $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u_{xx} + u_y = 0$, $u_{xx} + u_{yy} = g$.

2.1.1. Persamaan Hantaran Panas Dimensi satu

Misalkan sebuah kawat logam dengan panjang *l* yang dapat mengalirkan panas dan kita dapat menentukan/mengukur suhu pada setiap titik atau lokasi x dan pada setiap waktu t, sebutlah ukurannya adalah $u(x,t)$. Kita asumsikan bahwa fungsi ini mempunyai turunan parsial yang kontiniu baik turunan parsial 1 dan 2. Selanjutnya partisi panjang kawat tersebut dalam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dan diharapkan bahwa temperatur dilokasi x_i pada saat waktu t adalah fungsi konstan, dan merupan rata – rata suhu diseputaran titik tersebut. Dalam bentuk simbolik dituliskan :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) = 0 \quad \text{jika} \quad u(x,t) = \frac{1}{2}u(x_{i-1}, t) + \frac{1}{2}u(x_{i+1}, t)$$

Sebagai contoh, temperarur di titik $x = 50$ maka temperatur sebelah kiri adalah 40 dan sebelah kanan adalah 60. Prinsip hukum dinamik menjelaskan bahwa perubahan temperatur terhadap laju waktu pada posisi x_i adalah sebanding dengan selisih temperatur pada x_i dan rata – rata temperatur pada titik disekelingnya yaitu x_{i-1}, x_{i+1}. Untuk menterjemahkan hal ini dalam bentuk matematis, perkenalkan sebuah konstanta k yang tergantung dengan sifat – sifat media hantaran panas. Jika media merupakan konduktor baik maka nilai k adalah besar dan akan kecil jika media merupakan konduktor kurang baik. Dalam bentuk matematis kondisi ini dapat dituliskan dengan :

$$\frac{\partial u}{\partial t}u(x_i, t) = k\left(\frac{1}{2}[u(x_{i+1}, t) + u(x_{i-1}, t)] - u(x_i, t)\right)$$

$, i = 1,2, \dots, n$

Bentuk diatas adalah bentuk persamaan diferensial biasa, untuk mendapatkan bentuk persamaan diferensial parsial untuk kondisi ini akan diaplikasikan teorema Taylor berikut :

$$u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t) = (x_{i+1} - x_i)u_x(x_i, t) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 u_{xx}(x_i', t)$$

$$u(x_{i-1}, t) - u(x_i, t) = (x_{i-1} - x_i)u_x(x_i, t) + \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 u_{xx}(x_i'', t)$$

Dimana titik x_i', x_i'' memenuhi $x_{i-1} \le x_i'' \le x_i \le x_i' \le x_{i+1}$. Misalkan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ maka diperoleh persamaan :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) = \frac{k(\Delta x)^2}{4}[u_{xx}(x_i', t) + u_{xx}(x_t'', t)]$$

Jika jarak antar titik sangat kecil maka nilai turunan parsial kedua akan bervariasi sangat kecil diseputar titik x_i, x_i', x_i'' oleh karena itu kita dapat menggantikan nilai tutrunan parsial kedua dengan nilai pada titik x_i. Defenisikan $K = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$ maka didapatkan :

$\frac{\partial u}{\partial t} = K u_{xx}$ ....(*)

Dimana K disebut dengan konstanta difusitas dan persamaan (*) disbut dengan persamaan panas dimensi satu.

2.2. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah sebuah proses numerik untuk mengaproksimasi atau solusi persamaan diferensial parsial. Metode ini bekerja dengan mendiskritisasi variabel bebas pada persamaan diferensial menjadi grid dan menggunakan konsep deret Taylor. Misalkan *U* adalah fungsi bergantung pada *x* dan *t* . Dengan menggunakan formula Taylor, akan dikonstruksi turunan parsial *U* terhadap *x*

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(t, x_0) + \cdots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} U_{n-1}(t, x_0)$$
$$+ \mathcal{O}(\Delta x^n)$$

Dengan mempersingkat persamaan diatas pada $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ diperoleh :

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2$$

Dalam skema numerik, maka variabel *x* dipartisi menajadi diskrit yang disebut dengan grid : $x_0 . x_1, x_{2,\dots,} x_n$ dan *t* dipartisi menjadi : : $t_0 . t_1, t_{2,\dots,} t_m$.

Beda Hingga Maju

Jika diasumsikan bahwa Δx adalah kosntan dan $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ dapat diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_i)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Dengan mengabaikan $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ sebagai galat maka diperoleh :

$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_i)}{\Delta x}$ bentuk persamaan ini disebut dengan beda hingga maju orde 1.

Beda Hingga Mundur

Jika Δx diganti dengan $-\Delta x$ pada persamaan :

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2$$

Maka diperoleh :

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0) - U(t, x_0 - \Delta x)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Dengan mengevaluasi pada titik (t_n, x_i) diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_i) - U(t_n, x_{i-1})}{\Delta x}$$

Bentuk ini disebut dengan beda hingga mundur orde 1.

Beda Hingga Terpusat

Dengan melakukan ekspansi deret Taylor diatas samapai $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ dengan menggunakan Δx dan $-\Delta x$ dan mengavaluasinya pada (t_n, x_i) diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_{i-1})}{2\Delta x}$$

Bentuk ini disebut dengan beda hingga terpusat orde 2.

2.3. Assimilasi Data

Asimilasi data merupakan suatu metode estimasi yang diperoleh dari penggabungan antara output dari sebuah model dan data-data pengukuran. Salah satu metode yang menggunakan konsep assimilasi data adalah metode ensemble kalman filter yang dikembangkan oleh Geir Evensen tahun 1994. Metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem linier maupun nonlinier.

Bentuk umum sistem dinamik pada EnKF adalah:

$$\mathrm{x}_{k+1} = \mathrm{f}(\mathrm{u}_k, \mathrm{x}_k) + \mathrm{w}_k$$

dengan pengukuran linier $z \in R^m$ yaitu :

$$\mathrm{z}_k = \mathrm{H}\mathrm{x}_k + \mathrm{v}_k$$

$$\mathrm{x}_0 \sim \mathrm{N}(\overline{\mathrm{x}_0}, \mathrm{P}_{\mathrm{x}_0})$$

$$\mathrm{w}_k \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{Q}_k)$$

$$\mathrm{v}_k \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{R}_k)$$

Proses estimasi pada EnKF diawali dengan membangkitkan sejumlah N_e ansambel dengan mean 0 dan kovarian P_{x_0} . Ansambel yang dibangkitkan dilakukan secara random dan berdistribusi normal. Misalkan akan dibangkitkan sejumlah N_e ansambel untuk $x_{0,i} = [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \cdots, x_{0,N_e}]$.

Secara umum tahap pada metode EnKF tidak jauh berbeda dengan tahap estimasi pada metode KF. Hanya saja, sebelum masuk ke tahap prediksi, dicari terlebih dahulu rata-rata ansambel yang telah dibangkitkan dengan persamaan:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N}(x_{k,i})$$

dan untuk akurasinya dihitung dengan persamaan kovarian *error* P_k, yaitu:

$$P_k = \frac{1}{N_e - 1}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_{k-1}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k-1}^- - \hat{x}_k^-)^t$$

Pada tahap koreksi, nilai estimasi dihitung dengan persamaan:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_{k,i})$$

$$\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^- + K_k(z_{k,i} - H\hat{x}_{k,i}^-)$$

dan tingkat akurasinya dihitung seperti pada persamaan kovarian *error* tahap koreksi pada metode KF. Berikut adalah algoritma Ensemble Kalman Filter.

Model Sistem dan Model Pengukuran	$x_{k+1} = f(x, u_k) + w_k, w_k \sim N(0, Q_k)$ $z_k = Hx_k + v_k, v_k \sim N(0. R_k)$
Inisiasi	Bangkitakan N_e ansambel awal $\bar{x}_0$: $x_{0,i} = [x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{N_e}]$ Tentukan nilai awal : $\hat{x}_0 = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}(x_{0,i})$
Tahap Prediksi	$\hat{x}_k^- = f(u_{k-1}, x_{k-1}) + w_{k,i}, w_{k,i} \sim N(0, R_k)$ Estimasi : $\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}(\hat{x}_{k-1}^-, i)$ Kovarian *error* : $P_k^- = \frac{1}{N_e - 1}\sum_{i=1}^{N_e}(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^t$
Tahap Koreksi	$z_{k,i} = z_k + v_{k,i}, v_k \sim N(0, R_k)$ Kalman Gain : $K_k = P_k^- H^t (H P_k^- H^t + R_k)^{-1}$ Estimasi : $\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^- + K_k(z_{k,i} - H\hat{x}_{k,i}^-)$ $\hat{x}_k = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\hat{x}_{k,i}$ Kovariansi *error* : $P_k = [I - K_k H]P_k^-$

3. METODE PELAKSANAAN

Proses kerja yang dilakukan dalam menerapkan konsep assimilasi data ansambel pada persamaan hantaran panas dimulai dengaan diskritisasi pada persamaan panas dengan menggunakan metode beda hingga maju :

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Kedua bentuk diskritisasi ini disubstitusi ke persamaan panas.

Model diskrit yang telah ada masih dalam bentuk deterministik. Sedangkan dalam pemodelan dilakukan asumsi-asumsi yang menyebabkan model memuat *noise*, maka perlu ditambahkan faktor stokastik berupa *noise* sistem (w_k) pada model sistem dan *noise* pengukuran (v_k) pada model pengukuran sehingga didapat suatu model stokastik. Penambahan faktor stokastik berupa *noise* dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak dari komputer melalui program Matlab. *Noise* yang dibangkitkan diasumsikan memiliki sebaran normal dengan *mean* nol sedangkan variansi *noise* diasumsikan konstan sebesar Q dan R.

Selanjutnya pada tahapan estimasi dengan menerapkan konsep ansambel dimulai dengan pendefenisian model sistem dan model pengukuran, inisiasi ansambel awal, prediksi dan koreksi. Untuk memperlihatkan konsep ini, maka diambil sebuah kasus sebagai berikut : Sebuah kawat dengan panjang 10 cm yang disolasi kecuali pada ujungnya,suhu pada kedua ujung dijaga tetap pada 0^0 .Temperatur awal dalam kawat mengikuti persamaan $f(x) = 5sin\frac{1}{2}x$ Koefisien difusitas adalah 1. Maka konstruksi matematis kasus ini adalah :

$$u_t = u_{xx} \;, 0 \le x \le 10, t > 0$$

Kondisi batas

$$u(0,t) = 0 \;, u(10,t) = 0 \;, t \ge 0$$

Kondisi awal :

$$u(x,0) = 5 sin \frac{1}{2} x$$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses diskritisasi untuk kasus diatas dilakukan dengan metode beda hingga :

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

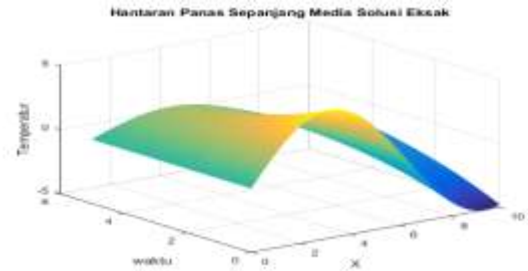
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \gamma u_{i+1}^n - 2\gamma u_i^n + \gamma u_{i-1}^n$$

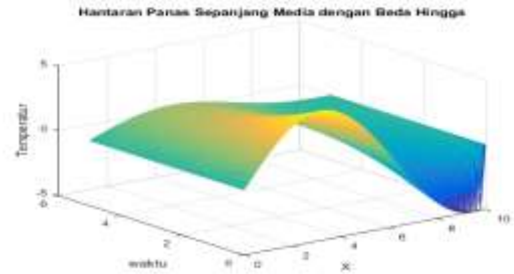
Dimana : $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Misalkan $u_k = u_i^n + \gamma u_{i+1}^n - 2\gamma u_i^n + \gamma u_{i-1}^n$ dan $u_{k+1} = u_i^{n+1}$ maka model sistem adalah $u_{k+1} = u_k$ dan $\mu_k = 0$

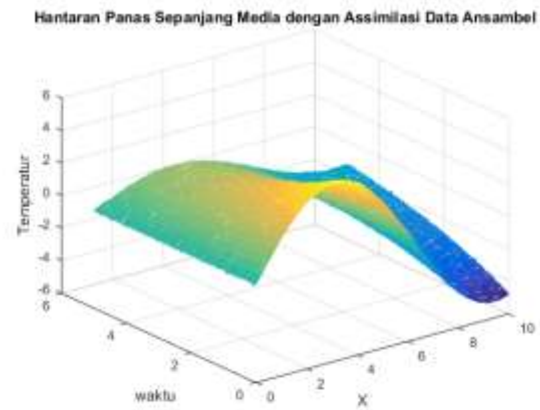
Dan $u_{k+1} = f(u_k, \mu_k) + w_k$ merupakan persamaan model dalam sistem metode ansambel Kalman Filter. Sedangkan model pengukuran adalah $z_k = H_k u_k + v_k$. Proses simulasi untuk mengestimasi hantaran panas kasus ini dilakukan dengan bantuan Matlab dan mengikuti algoritma EnKF dimana hasilnya adalah sebagai berikut.



Gambar 1.Profil Solusi Eksak Persamaan Panas

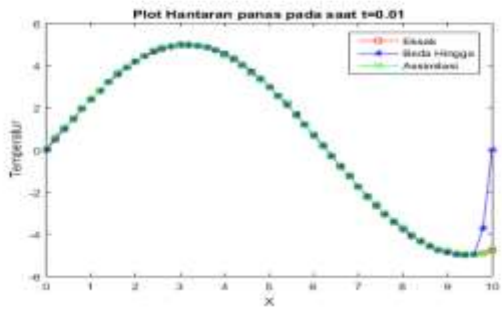


Gambar 2.Profil Beda Hingga Persamaan Panas

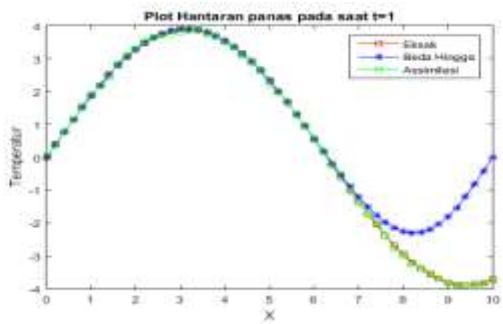


Gambar 3.Profil Assimilasi Data Persamaan Panas

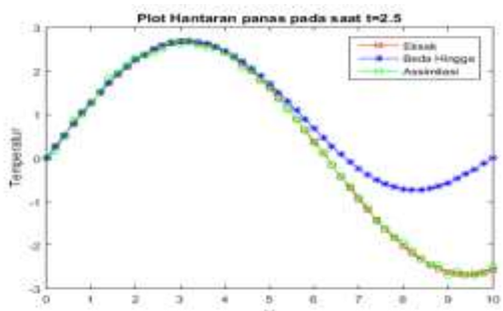
Dilihat dari ketiga gambar profil solusi hantaran panas diatas seolah – olah tidak ada perbedaan yang signifikan. Hal ini dikarenakan kedua metode baik beda hingga maupun konsep assimilasi data ansambel dapat mendekati solusi eksak dengan baik. Tetapi jika diambil beberapa waktu maka akan terlihat adanya perbedaan antara solusi dengan metode beda hingga dengan konsep assimilasi data ansambel seperti yang ditampilkan dalam gambar grafik berikut.



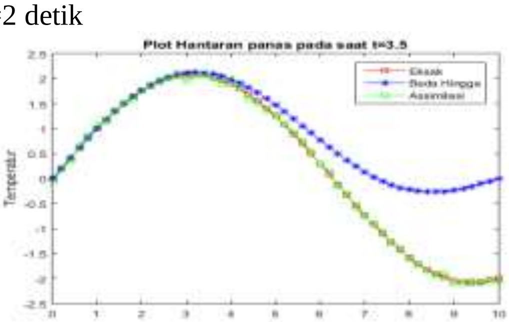
Gambar 4. Plot profil persamaan panas pada saat t=0.01 detik



Gambar 5. Plot Profil persamaan panas pada saat t=1 detik

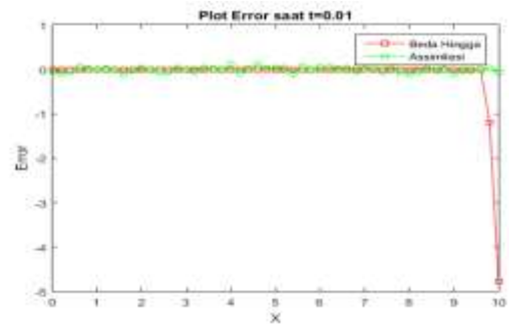


Gambar 6.Plot profil persamaan panas pada saat t=2 detik



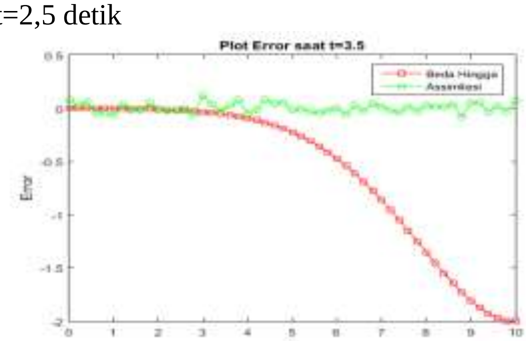
Gambar 7. Plot profi persamaan panas pada saat t=3 detik

Pada saat t=0.01detik solusi beda hingga dan konsep assimilasi data ansambel terdapat perbedaan yang kecil, tetapi pada saat t=1detik, t=2,5detik dan t=3,5detik perbedaan antara solusi beda hingga dengan solusi konsep assimilasi data ansambel semakin nyata dan cukup signifikan.



Gambar 8. Perbandingan *error* metode beda hingga dan assimilasi data ansambel pada saat t=0.01detik

Gambar 9. Perbandingan *error* metode beda hingga dan assimilasi data ansambel pada saat t=2,5 detik



Gambar 10. Perbandingan *error* metode beda hingga dan assimilasi data ansambel pada saat t=3,5 detik

Pergerakan *error* pada ketiga sampel waktu pada gambar terlihat bahwa *error* yang dihasilkan ole konsep assimilasi data ansambel lebih stabil dan lebih kecil dibandingkan dengan metode beda hingga. Demikian juga jika dikaji untuk keseluruhan titik yang diestimasi diperoleh bahwa persentase kesalahan absolut metode beda hingga : 28,55% sedangkan persentase kesalahan absolut konsep assimilasi data ansambel adalah : 2,14%.

5. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan analisa yang telah dilakukan maka dapat ditarik keimpulan dari kajian ini yaitu :

1. Metode beda hingga dan konsep assimilasi data ansambel dapat mendekati solusi persamaan panas dengan baik.
2. Hasil estimasi dengan menerapkan konsep data assimilas data ansambel memberikan hasil yang lebih akurat yaitu dengan persentase kesalahan absolut sebesar 2,14% dibandingkan dengan hasil metode beda hingga dengan persentase kesalahan absolut sebesar 28,55%.

Sedangakn saran yang dapat diberikan melalui kajian inni adalah : konsep assimilasi data ansambel untuk hantaran panas satu dimensi berhasil dengan baik diterapkan, tetapi untuk dimensi yang lebih tinggi belum tentu berhasil karena kompleksitas permasalahn yang jauh lebih tinggi.

6. DAFTAR PUSTAKA

Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman and Jonathan M. Rosenberg (2001), *A Guide to Matlab for Beginners and Experinced User*. Cambridge University Press.

David L. Powers (2006), *Boundary Problems and Partial Differential Equation ,Fifth Edition.* Elsevier Academic Press.

Erwin Kreyszig (2001), *Advance Engineering Mathematics, 8th Edition.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

Jaan Kiusalaas (2005), *Numerical Methods in Engineering with Matlab*. Cambridge University Press.

John C. Strikwerda (2004), *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation,Second Edition.* Soceity for Industrial and Applied Mathematics. Philadelpia.

Geir Evensen (2003), *The Ensemble Kalman Filter : Theorical Formulation and*

Practical Implementation. Ocean Dynamics Vol.53

Hery Andi Sitompul (2011), *Estimasi Parameter Reservoir Komposit dengan Teknik Ensemble Kalman Filter dan Algoritma Genetika*, Thesis ITB.

Mark A. Pinsky (2003),*Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Aplication, Third Edition*. American Mathematical Society. Rhode Island.