Interpolasi Data Berdimensi *d >1* dengan Fungsi Basis Radial (*Radial Basis Function*/RBF)

Oleh:

Hery Andi Sitompul [1)]

dan Tambos A Sianturi [2)]

Universitas Darma Agung, Medan

dan Universitas HKBP Nommensen, Pematang Siantar [1,2)]

E-mail:

herystpl@gmail.com [1)]

tambos.sianturi73@gmail.com [2)]

ABSTRACT

Radial Basis Function (RBF) is a a function used for data applications. A radial function Φ is a real valued function whose depends only on the distance the data input and some fixed point c , called a centre point. Distance between some fixed point/centre and data input are usually Euclidean metric so that $\Phi(r) = \Phi(\|x - x_i\|)$. Commonly types of Radial Basis Function using a ε to indicate a shape parameter to scale the input data of the radial centre. Because this method has been proven effective and flexible so that it is widely used in engineering and science, this paper will discuss how to use radial bases to interpolate dimension 2 data. From the results of the discussion, the right method is obtained to find the right solution.

Keywords : Radial Basis Function, Gaussian, Interpolation, RMSE

ABSTRAK

Fungsi Basis Radial (RBF) merupakan sebuah fungsi yang biasanya digunakan untuk aproksimasi sebuah fungsi berdasarkan informasi data. Fungsi radial Φ merupakan sebuah fungsi bernilai ril yang hanya tergantung pada jarak antara data input dengan beberapa titik tetap c yang disebut sebagai pusat. Jarak antara beberapa titik tetap dengan titik informasi biasanya berukuran Euclidean yang sedemikian hingga $\Phi(r) = \Phi(\|x - x_i\|)$. Pada umumnya tipe dari fungsi basis radial menggunakan sebuah parameter ε untuk mengindikasikan skala

bentuk hubungan data masukan dengan pusat radial. Karena metode ini sudah terbukti efektif dan fleksibel sehingga banyak digunakan pada bidang teknik dan sains, maka dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana menggunakan fungsi basis radial untuk menginterpolasi data berdimensi 2. Dari hasil pembahasan diperoleh bahwa metode ini akurat untuk mendekati nilai sebenarnya.

Kata Kunci : Fungsi Basis Radial, Gaussian, Interpolasi, RMSE

1.PENDAHULUAN

Permasalahan yang sering dihadapi dalam ilmu sains dan keteknikan adalah bagaimana melakukan interpolasi data acak. Jika data yang dihadapi adalah data dengan dimensi satu, maka metode untuk menyelesaikannya sudah sangat banyak tersedia misalnya interpolasi polinom dan Fourier. Pada umumnya metode ini menggunakan skema : untuk sekumpulan *n* data titik $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ dan berkorespondensi dengan sekumpulan nilai $\{f_j\}_{j=1}^{n}$, kumpulan fungsi basis $\{\Psi_j(x)\}_{j=1}^{n}$ dipilih sedemikian hingga kombinasi linier dari fungsi tersebut memenuhi kondisi interpolasi. Untuk lebih jelas lagi sebuah fungsi $s(x)$ diberikan dalam bentuk :

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \Psi_j(x) \quad \text{…………(1.1)}$$

Sedemikian hingga$s(x_j) = f_j, j = 1,2,3 \ldots n$

Kondisi interpolasi ini akan memberikan sebuah sistem persamaan linier untuk menentukan nilai koefisien λ_j. Untuk setiap sebarang pilihan fungsi basis $\Psi_j(x)$ sistem linier dijamin tidak singular apapun data $\{x_j\}_{j=1}^{n}$.

Jika data yang dihadapi adalah data berdimesi lebih dari satu (misalnya data $x\ dan\ x_j$ bukanlah skalar tapi berupa vektor $\bar{x}\,, \bar{x}_j \in \mathbb{R}^{d>1}$ maka pendekatan seperti yang dijelaskan diatas tidak akan mampu menyelesaikannya.

Untuk sekelompok fungsi basis $\{\Psi_j(\bar{x})\}_{j=1}^{n}, (n > 1)$ akan terdapat sekelompok data titik $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^{n}$yang akan dapat mengakibatka sistem linier untuk menentukan koefisien menjadi singular. Keadaan tidak singular tersebut dapat dilalui dengan pendekatan yang berbeda pada fungsi interpolasi.

Metode *Radial Basis Function* melakukan pendekatan untuk mengatasi masalah singularitas tersebut dengan mengubah kombinasi linier fungsi basis menjadi sebuah fungsi basis tunggal yang secara radial (radially) simetris terhadap pusat atau nilai tengah kumpulan fungsi basis tersebut.

Dalam bab bab berikut ini akan disajikan apa itu *Radial Basis Function* dan bagaiman menggunakannya.

Maksud dan Tujuan

Maksud dari karya ilmiah ini adalah untuk melakukan suatu kajian interpolasi dari sekelompok data yang berdimensi lebih dari satu dengan metode *Radial Basis Function* (RBF), sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah untuk memperlihatkan bahwa *Radial Basis Function* (RBF) adalah salah satu metode interpolasi yang baik untuk data berdimensi lebih dari satu (*Multivariate Data*).

2. TINJAUAN PUSTAKA

Radial Basis Function (RBF)

Perhitungan interpolasi dengan *Radial Basis Function* (RBF) berfokus pada rekonstruksi sebuah fungsi yang tidak diketahui berdasarkan data yang diketahui (data informasi).

Misalkan terdapat sebuah himpunan yang terdiri dari data acak sebanyak *n* yaitu : $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^{n}$ yang berkorespondensi dengan sekumpulan nilai $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ maka fungsi basis untuk interpolasi dengan RBF adalah sebagai berikut :

$s(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi(\|\bar{x} - \bar{x}_j\|)$….(2.1) dimana $\Phi(r), r \geq 0$ adalah beberapa fungsi radial, sedangkan koefisien ekspansi λ_j dapat ditentukan dari kondisi interpolasi $s(\bar{x}_j) = f_j, j = 1,2,3,..,n$ yang akan memberikan sistem linier simetris berikut :

$[A][\lambda] = [f]$…………………...(2.2)

Dimana nilai dari elemen *A* adalah $a_{ll点,k} = \Phi(\|\bar{x}_j - \bar{x}_k\|)$.

Seperti yang sudah disebutkan diatas bahwa $\Phi(r)$ pada persamaan (2.1) memenuhi kondisi untuk menjamin bahwa matriks *A* pada persamaan (2.2) adalah non singular tanpa syarat. Terdapat beberapa fungsi yang umum dari $\Phi(r)$ yang akan memberikan solusi unik dari persamaan (2.1) yaitu :

Tipe Fungsi Basis	$\Phi(r), r \geq 0$
Pemulusan RBF Tak Hingga	
Gaussian (GA)	$e^{-(\varepsilon r)^2}$
Invers Quadratic (IQ)	$\frac{1}{1+(\varepsilon r)^2}$
Invers Multi Quadratic (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}}$
Multiquadratic (MQ)	$\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$
Pemulusan RBF Bertangga	
Linier	r
Kubik	r^3
Tin Plate Spine (TPS)	$r^2 \log r$

Tabel 2.1. Beberapa Fungsi RBF yang umum digunakan

Parameter ε pada fungsi RBF pemulusan tak hingga adalah parameter bebas (bisa ditentukan dengan melakukan beberapa percobaan berkali - kali) dengan tujuan untuk mengkontrol bentuk dari fungsi, dalam hal ini katakanlah berupa sebuah nilai tetap tk nol.

Seperti tertera pada tabel 2.1 diatas, bahwa secara umum fungsi $\Phi(r)$ terbagi atas dua bagian yaitu bentuk RBF pemulusan tak hingga dan RBF pemulusan bertangga. Pada RBF pemulusan tak hingga menghadirkan parameter control ε, yang sedemikian hingga jika $\varepsilon \to 0$ maka fungsi basis menjadi naik dan berlaku untuk ketiga bentuk tersebut. Untuk kasus pemulusan bertangga, jika jumlah data pada domain naik maka fungsi RBF secara alajbar akan berkumpul (berpusat) pada fungsi yang akan diinterpolasi.

Akar Kuadrat Rata – rata Galat (*Root Mean Square Error/RMSE*)

Metode akar kuadrat rata – rata dari galat (*Root Mean Square error/RMSE*) adalah alat yang paling sering digunakan untuk pengukuran ketelitian dari sebuah model yang digunakan untuk memprediksi sebuah nilai dibandingkan dengan hasil observasi. Pada dasarnya metode ini hanya menghitung rata – rata selisih hasil prediksi dan observasi.

Misalkan model untuk prediksi adalah $\hat{z}_j$ dan hasil observasi adalah x_j, galat $e_j = \hat{z}_j - z_j$, maka :

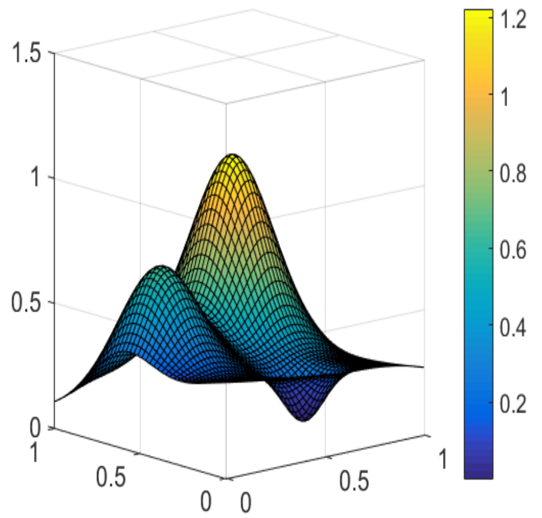
$$RMSE = \sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} e_j{}^2}{N}\right)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{z}_j - z_j\right)^2}{N}} \ldots\ldots 2.3$$

Jika nilai RMSE semakin kecil maka hasil prediksi semakin akurat atau model yang ada sangat baik.

3. METODE PELAKSANAAN

Dalam tulisan ini akan dilakukan pembatasan, yaitu fungsi basis yang digunakan hanyalah Gaussian $\Phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$ dan dimensi data adalah 2 $(d = 2)$. Untuk memperlihatkan bahwa metode *Radial Basis Function* (RBF) dapat menginterpolasi data dengan dimensi lebih dari 1 $x_j \in \mathbb{R}^d, d > 1$, akan diambil berbagai data titik yang berasal dari fungsi Franke yaitu :

$$f(x,y) = \frac{3}{4}e^{-1/4((9x-2)^2+(9y-2)^2)} + \frac{3}{4}e^{-1/49(9x+1)^2-1/10(9y+1)^2} + \frac{1}{2}e^{-1/4((9x-7)^2+(9y-3)^2)} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$$



Gambar 3.1 Grafik Fungsi Franke

Adapun langkah – langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan contoh kasus ini adalah :

1. Asumsikan bahwa data yang diperoleh memenuhi fungsi basis berikut : $s(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \Phi\left(\left\|x - x_j\right\|^2\right), x \in \mathbb{R}^d$, dimana $\Phi(r)$ adalah Gaussian.
2. Gunakan kondisi interpolasi bahwa : $s(x_{\text{敍}}) = f(x_j), i = 1,2,3, \ldots, N$ dengan demikian akan diperoleh sistem linier berikut ini :$[A][\lambda] = [f]$ dimana

$A =$

$$\begin{bmatrix} \Phi(\| \text{頛}_1 - x_1\|^2) & \Phi(\|x_1 - x_2\|^2 & \cdots & \Phi(\|x_1 - x_N\|^2 \\ \Phi(\|x_2 - x_1\|^2 & \Phi(\|x_2 - 2\|^2 & \cdots & \Phi(\|x_2 - x_N\|^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Phi(\|x_N - x_1\|^2 & \Phi(\|x_N - x_2\|^2 & \cdots & \Phi(\|x_N - x_N\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \hbar_N \end{bmatrix} \text{ dan } f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

3. Dengan menyelesaikan sistem linier pada langkah 2 diatas akan diperoleh nilai $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}$ yang akan dapat digunakan untuk interpolasi.
4. Hitung nilai galat (error) : $e_j = s(\overline{x}_j) - f(x_j, y_j)$
5. Penyelesaian kasus ini dilakukan dengan menggunakan pemograman Matlab.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah melakukan uji coba dengan pemograman matlab dengan mengubah jumlah titik data dan nilai parameter ε pada setiap uji coba diperoleh hasil sebagai berikut :

1. Interpolasi RBF dengan Gaussian dan Matriks jarak pada nilai parameter tetap $\varepsilon = 21{,}1$ dan berbagai ukuran data

N

Gaussian (GA)			
k	*N*	RMSE	Maks.Error
1	9	3□647169e-001	1□039682e+000
2	25	3□203404e-001	9□670980e-001
3	81	2□152222e-001	8□455161e-001
4	289	7□431729e-002	7□219253e-001
5	1089	1□398297e-002	3□857234e-001
6	4225	4□890709e-004	1□940675e-002

Tabel 4.1. Akurasi interpolsi Gaussian

Matriks Jarak			
k	*N*	RMSE	Maks.Error
1	9	1□323106e-001	4□578028e-001
2	25	6□400558e-002	2□767871e-001
3	81	1□343780e-002	6□733130e-002

4	289	3□707360e-003	3□057540e-002
5	1089	1□143589e-003	1□451950e-002
6	4225	4□002749e-004	8□022336e-003

Tabel 4.2 Akurasi interpolasi Matriks jarak

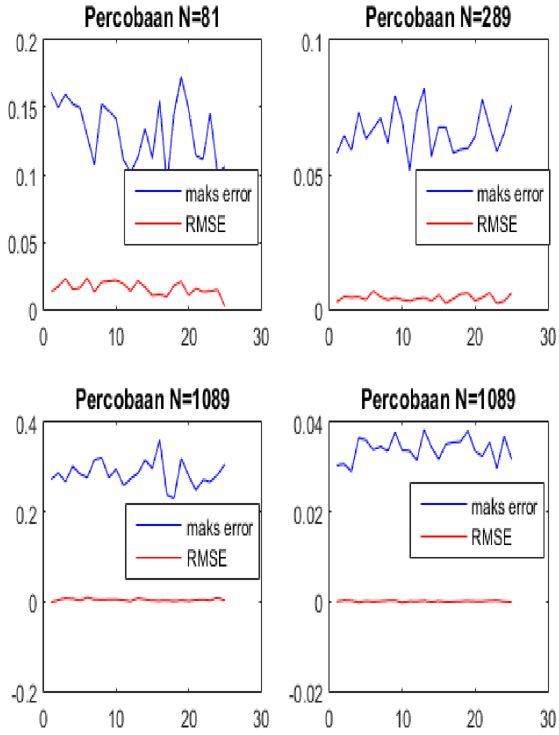
4.2. Interpolasi RBF dengan Gaussian Pada Berbagai Percobaan Nilai ε

		Percobaan Beberapa Nilai ε		
k	N	ε	RMSE	Maks.Error
1	9	0,02	3□658421e-001	1□580259e+000
2	25	0.32	6□400558e-002	2□845554e+000
3	81	1.64	1□743059e-001	2□398284e+000
4	289	4.73	2□785388e-003	5□472502e-002
5	1089	10,5	4□945428e-004	1□812246e-002
6	4225	21,1	4□890709e-004	1□940675e-002

Tabel 4.3 Akurasi RBF dengan Gussian

		Percobaan Beberapa Nilai ε		
k	N	ε	RMSE	Maks.Error
1	9	2,23	1□118026e-001	3□450275e-001
2	25	3,64	4□032550e-002	2□996488e-001
3	81	4,28	1□090601e-002	1□579465e-001
4	289	5.46	4□610079e-004	7□978283e-003
5	1089	6,2	2□498848e-006	8□779119e-005
6	4225	6,3	4□269292e-008	8□889552e-007

Tabel 4.4 Akurasi RBF dengan Gaussian



Gambar 4.1. Grafik dari error pada bebepa percobaan dengan parameter tetap.

5.KESIMPULAN dan SARAN

Dari hasil uji coba berbagai nilai parameter dan ukuran data seperti yang ditampilkan pada beberapa tabel bagian 4 diatas dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Akurasi yang terbaik diperoleh pada saat nilai parameter $\varepsilon = 21{,}1$ dan ukuran data $N = 4225$.
2. Untuk nilai parameter yang terbaik $\varepsilon = 21{,}1$ akurasi yang dihasilkan matriks lebih baik daripada Gaussian.
3. Untuk mendapatkan interpolasi RBF dengan Gaussian yang lebih

baik maka perlu untuk menemukan nilai parameter ε yang optimal.

4. Jika data yang diperoleh bukan berasal dari sebuah fungsi yang diketahui maka akan sangat sulit untuk menentukan nilai parameter ε yang optimal hanya berdasarkan pengamatan RMSE (Root Mean Square Error).

Adapun saran dari kajian ini adalah bagaiman mendapatkan nilai parameter ε yang optimal tanpa melakukan berbagai percobaan.

6. DAFTAR PUSTAKA

1. Bengt Fornberg and Natasha Flyer, *Acuracy of Radial Basis Function Interpolation and Derivative Aproximations on 1-D Infinte Grid*.
2. Grady B.Wright, *Radial Basis Function Interpolation : Numerical and Analytical Developments*, Thesis University of Colorado 2003.
3. Mark J.L.Orr, *Introduction to Radial Basis Function Networks*, Centre for Cognitive Scince, University of Edinburgh, 1996
4. R Schaback, *A Practical Guide to Radial Basis Function*,2007
5. Scott A. Sarra,Marshall University, US,*The Matlab Radial Basis Function Toolbox*, Software Metapaper,2017.